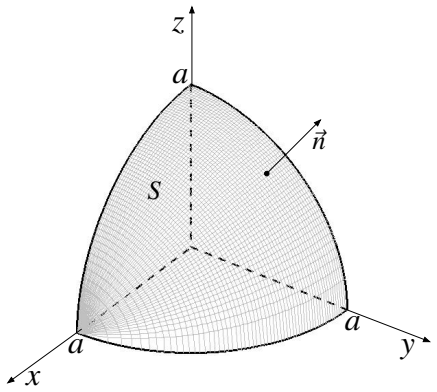
Cálculo 3A – EP13 – Integral de superfície de campo vetorial – Gabarito

Exercício 1: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$, sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ e S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, no primeiro octante com a normal apontando para fora.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.

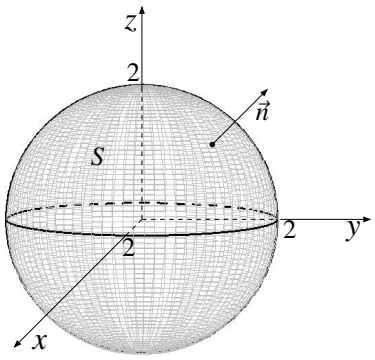


Como $\overrightarrow{n}$ aponta para fora de S, então $\overrightarrow{n} = \frac{(x,y,z)}{a}$. Assim:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_S (y,-x,0) \cdot \frac{(x,y,z)}{a}\, dS = \iint_S \frac{xy - xy}{a}\, dS = \iint_S 0\, dS = 0\,.$$

Exercício 2: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,-2z)$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com vetor normal $\overrightarrow{n}$ exterior.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Como $\overrightarrow{n}$ aponta para o exterior de S então $\overrightarrow{n} = \frac{(x,y,z)}{2}$. Logo:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_S (x,y,-2z) \cdot \frac{(x,y,z)}{2}\, dS = \frac{1}{2}\iint_S \left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) dS =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_S \Big(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=4} - 3z^2\Big) dS = 2A(S) - \frac{3}{2}\iint_S z^2\, dS\,.$$

Para calcular esta integral, devemos parametrizar S. Temos então:

$$S : \overrightarrow{r}(\phi, \theta) = (2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\phi)$$

com $(\phi\,,\theta) \in D : \begin{cases} 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ e $dS = 2^2 \operatorname{sen}\phi \; d\phi d\theta = 4 \operatorname{sen}\phi \; d\phi d\theta$. Então:

$$\iint_S z^2 \; dS = \iint_D (2\cos\phi)^2 \, 4 \operatorname{sen}\phi \; d\phi d\theta = 16 \int_0^{\pi} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi =$$

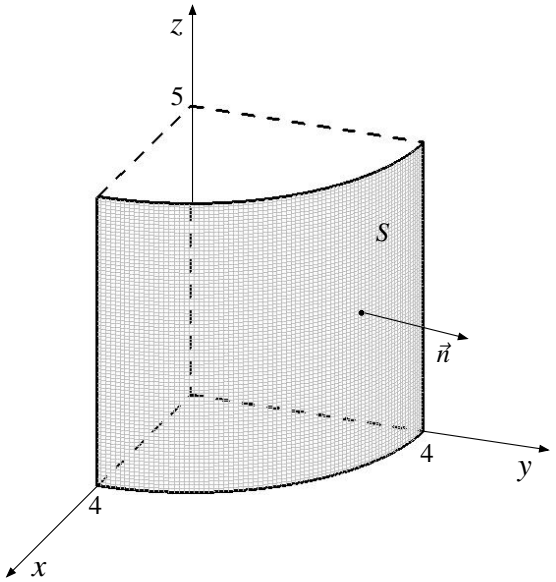
$$= -32\pi \int_0^{\pi} \cos^2\phi \; d(\cos\phi) = -32\pi \left[\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{32}{3}\pi(-1-1) = \frac{64\pi}{3}\,.$$

Como $A(S) = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$. Logo:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \; dS = 2 \cdot 16\pi - \frac{3}{2} \cdot \frac{64\pi}{3} = 32\pi - 32\pi = 0\,.$$

Exercício 3: Calcule o fluxo de $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{\mathbf{i}} + x\,\vec{\mathbf{j}} - 3y^2 z\,\vec{\mathbf{k}}$ através da superfície S parte do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ situado no primeiro octante, entre $z = 0$ e $z = 5$ e a normal $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{i}} \ge 0$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Como $\vec{n} \cdot \vec{\mathbf{i}} \ge 0$ então a primeira componente de $\vec{n}$ é não-negativa. Logo, $\vec{n} = \frac{(x,y,0)}{a}$ com $a = 4$, isto é, $\vec{n} = \frac{(x,y,0)}{4}$. Assim, o fluxo é:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \left(z, x, -3y^2 z\right) \cdot \frac{(x,y,0)}{4} \, dS = \frac{1}{4} \iint_S (xz + xy) \; dS\,.$$

Para calcular esta integral, devemos parametrizar S. Temos então $S : \vec{r}(t,\theta) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, z)$, com $(t,z) \in D : \begin{cases} 0 \le t \le \pi/2 \\ 0 \le z \le 5 \end{cases}$. Logo:

$$\vec{r_t} \times \vec{r_z} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -4\operatorname{sen} t & 4\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 0)$$

donde

$$\left\|\vec{r}_t \times \vec{r}_z\right\| = \sqrt{16\cos^2 t + 16\,\mathrm{sen}^2\, t + 0} = \sqrt{16} = 4\,.$$

Como $dS = \left\|\vec{r}_t \times \vec{r}_z\right\| dtdz$ então $dS = 4\ dtdz$. Assim:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \frac{1}{4}\iint_D \Big[(4\cos t)z + (4\cos t)(4\,\mathrm{sen}\, t)\Big]4\ dtd\theta =$$

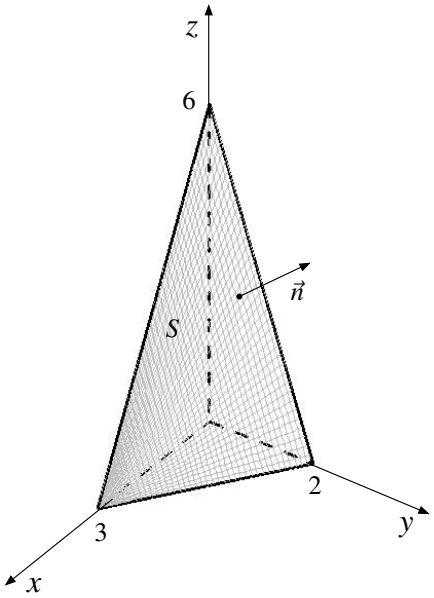
$$= \frac{4}{4}\int_0^5\int_0^{\pi/2} \Big[(4\cos t)z + 16\cos t\,\mathrm{sen}\, t\Big]dtdz =$$

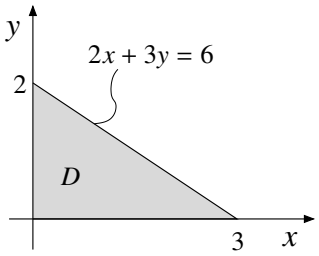
$$= \int_0^5 \Big[\Big[4\,\mathrm{sen}\, t\Big]_0^{\pi/2} z + 8\Big[\,\mathrm{sen}^2\, t\Big]_0^{\pi/2}\Big]\,dz = \int_0^5 (4z+8)\ dz =$$

$$= \left[\frac{4z^2}{2} + 8z\right]_0^5 = 50 + 40 = 90\,.$$

Exercício 4: Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ e S a região do plano $2x+3y+z = 6$, situada no primeiro octante, com $\vec{n}$ superior a S.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.





Temos que $S : z = 6 - 2x - 3y$, com $(x,y) \in D : \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le \dfrac{6-2x}{3} \end{cases}$.

Da teoria temos que $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (2,3,1)$ é um vetor normal a S, que é superior a S pois, a última componente de $\vec{N}$ é positiva.

Então, $\vec{n} = \dfrac{(2,3,1)}{\sqrt{14}}$. Temos, também, que $dS = \sqrt{14}\ dxdy$. Assim, o fluxo é dado por:

$$\Phi = \iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \iint_D \vec{F}(x,y,6-2x-3y)\cdot(2,3,1)\ dxdy =$$

$$= \iint_D (x,y,6-2x-3y)\cdot(2,3,1)\ dxdy = \iint_D (2x+3y+6-2x-3y)\ dxdy =$$

$$= \iint_D 6\ dxdy = 6A(D) = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 18\,.$$

Exercício 5: Calcule o fluxo do campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ através da superfície lateral do cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$, limitada inferiormente pelo plano $x + y + z = 1$ e superiormente pelo plano $x + y + z = 2$ com vetor normal $\overrightarrow{n}$ exterior.

Solução: Se $\overrightarrow{n}$ é exterior a S, então $\overrightarrow{n} = \frac{(x,y,0)}{a} = \frac{(x,y,0)}{1} = (x,y,0)$. Logo, o fluxo é dado por

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS = \iint_S (x,y,z)\cdot(x,y,0)\ dS = \iint_S \underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{=1}\ dS = \iint_S dS$$

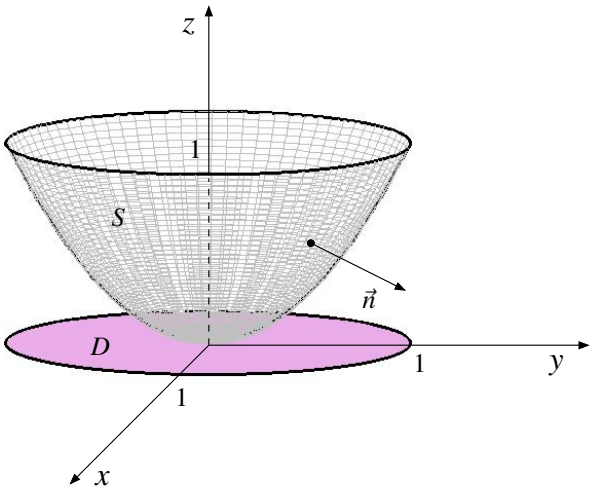
onde S é parametrizada por $\overrightarrow{r}(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$, com $(\theta,z) \in D : 0 \le \theta \le 2\pi$, $1 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \le z \le 2 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$ e $dS = \underbrace{a}_{=1}\ d\theta dz = d\theta dz$. Assim:

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS = \iint_D d\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_{1-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}^{2-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta} dz d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta - 1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\,.$$

Exercício 6: Calcule o fluxo do campo vetorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(y, -x, z^2\right)$ através da superfície $S : z = x^2 + y^2$, com $0 \le z \le 1$, na direção do vetor normal $\overrightarrow{n}$ exterior.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Temos $S : z = z(x,y) = x^2 + y^2$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \le 1$. Um vetor normal a S é dado por $\overrightarrow{N} = \left(-z_x, -z_y, 1\right) = (-2x, -2y, 1)$. Mas este vetor aponta para cima, isto é, para o interior de S. Logo, $-\overrightarrow{N} = (2x, 2y, -1)$ aponta para o exterior de S. Assim, $\overrightarrow{n} = \frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$ e $dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dxdy$. Então:

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS = \iint_D \left(y, -x, \left(x^2+y^2\right)^2\right)\cdot(2x,2y,-1)\ dxdy =$$

$$= \iint_D \left(2xy - 2xy - \left(x^2+y^2\right)^2\right) dxdy = -\iint_D \left(x^2+y^2\right)^2\ dxdy\,.$$

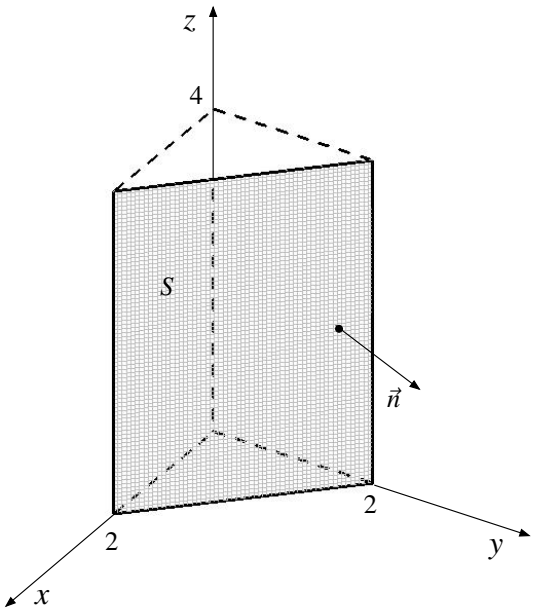
Passando para coordenadas polares, temos $\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(r^2\right)^2 = r^4, dxdy = r\ drd\theta$ e $D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$. Logo:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = -\iint_{D_{r\theta}} r^4\cdot r\ drd\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\ drd\theta =$$

$$= -\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}.$$

Exercício 7: Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS$, onde $\vec{F} = x^2\vec{\mathbf{i}} + y^2\vec{\mathbf{j}} + z^2\vec{\mathbf{k}}$ e S é a superfície plana $x+y=2$, delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $z=4$ e a normal se a afasta da origem.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Temos $S: y = y(x,z) = 2-x$ com $(x,z)\in D: 0\le x\le 2, 0\le y\le 4$. Então uma parametrização de S é dada por $\vec{r}(x,z) = (x, 2-x, z)$, com $(x,z)\in D: 0\le x\le 2, 0\le y\le 4$. Um vetor normal a S é

$$\vec{N} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,0).$$

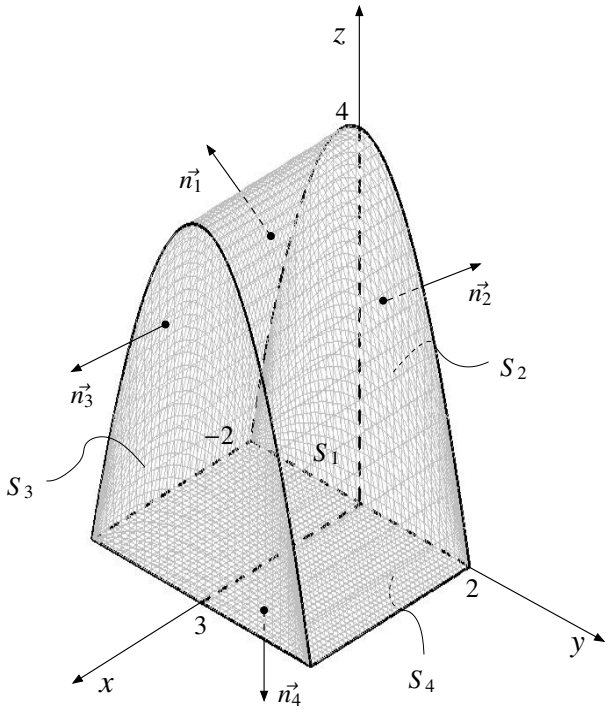
Este vetor aponta para a origem. Logo, $\vec{n} = -\frac{\vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \sqrt{2}\ dxdz$. Assim,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \iint_D \left(x^2, (2-x)^2, z^2\right)\cdot(1,1,0)\ dxdz = \iint_D \left(x^2+(2-x)^2\right)dxdz =$$

$$= \int_0^2 \left(x^2+(2-x)^2\right)\int_0^4 dzdx = 4\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(2-x)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}(8+8) = \frac{64}{3}.$$

Exercício 8: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$, onde $\overrightarrow{F} = \left(z^2 - x, -xy, 3z\right)$ e S é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ e o plano xy, com vetor $\overrightarrow{n}$ exterior.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Vemos que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, onde

$$S_1 : z = z(x,y) = 4 - y^2, (x,y) \in D_1 : 0 \le x \le 3, -2 \le y \le 2;$$
$$S_2 : x = 0, (y,z) \in D_2 : -2 \le y \le 2, 0 \le z \le 4 - y^2;$$
$$S_3 : x = 3, (x,y) \in D_2;$$
$$S_4 : z = 0, (x,y) \in D_1.$$

Como S está orientada então:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \sum_{i=1}^{4} \iint_{S_i} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_i}\, dS.$$

Cálculo de $\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS$: Um vetor normal a S_1 é dado por $\overrightarrow{N} = \left(-z_x, -z_y, 1\right) = (0, 2y, 1)$. Este vetor aponta para cima. Logo, $\overrightarrow{n_1} = \frac{(0,2y,1)}{\sqrt{1+4y^2}}$ e $dS = \sqrt{1+4y^2}\, dxdy$. Então:

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_1}\, dS = \iint_{D_1} \left(\left(4 - y^2\right)^2 - x, -xy, 3\left(4 - y^2\right)\right) \cdot (0, 2y, 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_D \left(-2xy^2 + 12 - 3y^2\right) dxdy = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{3} \left(-2xy^2 + 12 - 3y^2\right) dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[-x^2y^2 + 12x - 3xy^2\right]_0^3\, dy = \int_{-2}^{2} \left(-9y^2 + 36 - 9y^2\right) dy = \int_{-2}^{2} \left(-18y^2 + 36\right) dy =$$

$$= \left[-6y^3 + 36y\right]_{-2}^{2} = 2 \cdot (-6 \cdot 8 + 36 \cdot 2) = 48.$$

Cálculo de $\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\, dS$ **:** Temos $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{\mathbf{i}}$ e $dS = dydz$. Então:

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_2}\, dS = \iint_{D_2} \left(z^2 - 0, 0, 3z\right) \cdot (-1, 0, 0)\, dydz = -\iint_{D_2} z^2\, dydz\,.$$

Cálculo de $\iint_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\, dS$ **:** Temos $\overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{\mathbf{i}}$ e $dS = dydz$. Então:

$$\iint_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_3}\, dS = \iint_{D_2} \left(z^2 - 3, -3y, 3z\right) \cdot (1, 0, 0)\; dydz =$$

$$= \iint_{D_2} \left(z^2 - 3\right)\; dydz = \iint_{D_2} z^2\; dydz - 3\iint_{D_2}\; dydz\,.$$

Cálculo de $\iint_{S_4} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_4}\, dS$ **:** Temos $\overrightarrow{n_4} = -\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e $dS = dxdy$. Então:

$$\iint_{S_4} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_4}\, dS = \iint_{D_1} (-x, -xy, 0) \cdot (0, 0, -1)\; dxdy = \iint_{D_1} 0\; dxdy = 0\,.$$

Assim:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS = \sum_{i=1}^{4} \iint_{S_i} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_i}\; dS = 48 - \iint_{D_2} z^2\; dydz + \iint_{D_2} z^2\; dydz - 3\iint_{D_2}\; dydz$$

$$= 48 - 3\iint_{D_2}\; dydz\,.$$

Mas:

$$\iint_{D_2}\; dydz = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2}\; dzdy = \int_{-2}^{2}\left(4 - y^2\right)\; dy = \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\,.$$

Finalmente:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS = 48 - 3 \cdot \frac{32}{3} = 48 - 32 = 16\,.$$

Exercício 9: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS$, onde $\overrightarrow{F} = \left(x, y, -\frac{z^2}{2}\right)$, e S é a superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta AB, com $A = (0, 1, 2)$ e $B = (0, 2, 4)$ em torno do eixo z, onde o vetor normal $\overrightarrow{n}$ é exterior a S.

Solução: Uma parametrização do segmento AB é dada por

$$\overrightarrow{r}(t) = A + t(B - A) = (0, 1, 2) + t\,((0, 2, 4) - (0, 1, 2)) = (0, 1, 2) + t\,(0, 1, 2) = (0, 1 + t, 2 + 2t)$$

com $0 \leq t \leq 1$. Logo, $x(t) = 0\,, y(t) = 1 + t =$ raio de uma circunferência transversal e $z(t) = 2 + 2t =$ altura dessa circunferência. Então, uma parametrização de S é dada por

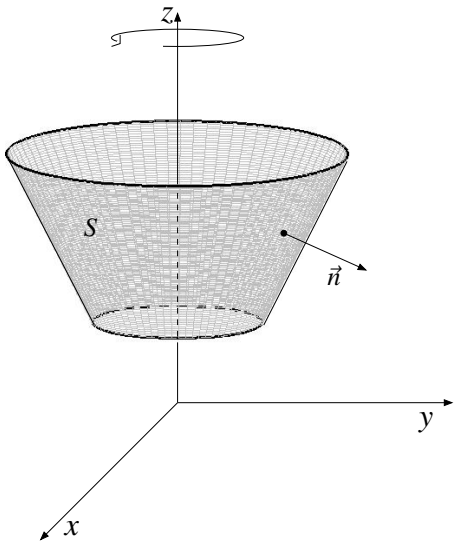
$$\overrightarrow{r}\,(t, \theta) = (y(t)\cos\theta\,, y(t)\,\mathrm{sen}\,\theta\,, z(t)) = ((1 + t)\cos\theta\,, (1 + t)\,\mathrm{sen}\,\theta\,, 2 + 2t)$$

onde $(t, \theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Um vetor normal a S é dado por

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r_t} \times \overrightarrow{r_\theta} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2 \\ -(1+t)\operatorname{sen}\theta & (1+t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(-2(1+t)\cos\theta, -2(1+t)\operatorname{sen}\theta, \underbrace{(1+t)\cos^2\theta + (1+t)\operatorname{sen}^2\theta}_{1+t} \Big) =$$

$$= (1+t)(-2\cos\theta, -2\operatorname{sen}\theta, 1) \ .$$



Como $\overrightarrow{n}$ é exterior a S então $\overrightarrow{n}$ aponta para baixo. Logo, $\overrightarrow{n} = -\dfrac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|} = \dfrac{(1+t)(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, -1)}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|}$ e $dS = \left\|\overrightarrow{N}\right\| \, dtd\theta$. Então:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, dS =$$

$$= \iint_D \left((1+t)\cos\theta, (1+t)\operatorname{sen}\theta, -\frac{(2+2t)^2}{2} \right) \cdot (1+t)(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, -1) \, dtd\theta =$$

$$= \iint_D \Big[\underbrace{2(1+t)^2\cos^2\theta + 2(1+t)^2\operatorname{sen}^2\theta}_{2(1+t)^2} + \frac{4}{2}(1+t)^2 \Big] dt =$$

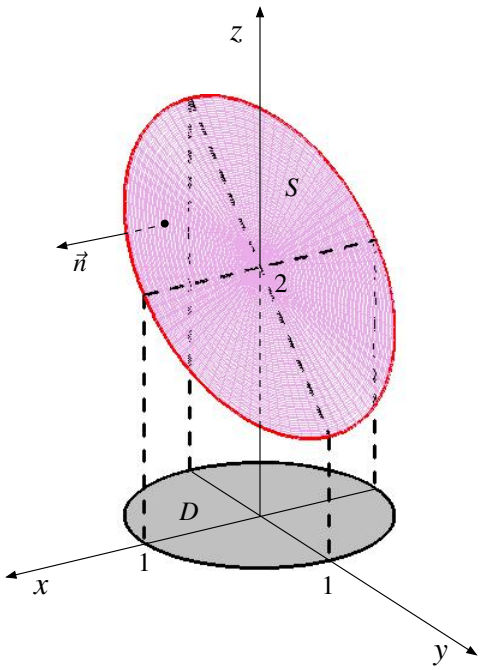
$$= \iint_D \left[2(1+t)^2 + 2(1+t)^2 \right] dt = \int_0^1 4(1+t)^2 \int_0^{2\pi} d\theta dt =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{4}{3}\left[(1+t)^3 \right]_0^1 = \frac{8\pi}{3}(8-1) = \frac{56\pi}{3} \, .$$

Exercício 10: Calcule $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, dS$, onde $\overrightarrow{F} = 3y^2z\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e S é a superfície plana $y + z = 2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com campo de vetores normais $\overrightarrow{n}$ tal que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{k}} < 0$.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.

Como $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{k} < 0$ então a terceira componente de $\overrightarrow{n}$ é negativa. Logo, $\overrightarrow{n}$ está voltada para baixo.



Temos $S : z = z(x,y) = 2 - y$, com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Um vetor normal a S é dado por $\overrightarrow{N} = \left(-z_x, -z_y, 1\right) = (0,1,1)$ que está voltado para cima. Logo, $\overrightarrow{n} = -\dfrac{\overrightarrow{N}}{\left\|\overrightarrow{N}\right\|} = \dfrac{(0,-1,-1)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \sqrt{2}\, dxdy$. Então:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\; dS = \iint_D \left(3y^2\,(2-y)\;, y\,, 2-y\right) \cdot (0,-1,-1)\, dxdy =$$

$$= \iint_D (-y - 2 + y)\, dxdy = -2 \iint_D dxdy = -2A(D) = -2\pi\,.$$